Spezielle Relativitätstheorie (SRT)

Im folgenden nehmen wir an, dass der Raum isotrop ist (alle Richtungen gleichwertig) sowie dass Raum und Zeit homogen sind, d.h. alle Raum-bzw. Zeitpunkte sind gleichwertig.

Galilei-Transformation

In der klassischen Physik wird der Wechsel zu einem sich mit Relativgeschwindigkeit $\vec{v}$ bewegenden Inertialsystem beschrieben durch [1]

$$\vec{r'} = \vec{r} - \vec{v}t$$

Damit gilt für die Transformation von Geschwindigkeiten und Beschleunigungen

$$\frac{d\vec{r'}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} - \vec{v}$$

$$\frac{d^2\vec{r'}}{dt^2} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

sowie für Relativabstände

$$(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)' = (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$$

und somit für die Kraft zwischen zwei Teilchen die nur von Relativkoordinaten abhängt:

$$\vec{F}' = \vec{F}(\vec{r}_1' - \vec{r}_2') = \vec{F}$$

Damit sind die Newtonschen Gesetze invariant.

Wegen der Isotropie des Raums kann die x-Achse in Richtung der Relativbewegung gewählt werden. Dann ist die Galilei Transformation

$$\begin{aligned} x' &= x - vt \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= t \end{aligned}$$

wobei die Transformation der Zeit normalerweise nicht explizit betrachtet wird (absolute Zeit)

[1] Die allgemeine Galilei Transformation kann auch eine Rotation oder Spiegelung des KS beinhalten

Einsteinsche Postulate

1. Postulat : Die Naturgesetze sind in allen Inertialsystemen gleich
2. Postulat : Die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum hat immer den Wert c

Wir wollen uns überlegen, wie eine Verallgemeinerung der Galileischen Transformation auszusehen hat. Dabei gehen wir von der absoluten Zeit weg und lassen eine Transformation auch der Zeit zu. Ein (Punkt)-Ereignis wird durch die Angabe von Ort und Zeit bezüglich eines Inertialsystems bestimmt. Die allgemeinste Transformation ist

$$\begin{aligned} \vec{r}' &= \vec{f}(\vec{r}, t) \\ t' &= g(\vec{r}, t) \end{aligned}$$

Wegen der angenommenen Homogenität der Zeit muss für ein Zeitintervall Δt gelten

$$\vec{f}(\vec{r}, t + \Delta) - \vec{f}(\vec{r}, t) = \vec{f}(\vec{r}, t) - \vec{f}(\vec{r}, t - \Delta t)$$

Für ein kleines Zeitintervall finden wir durch Taylorentwicklung

$$0 = \vec{f}(\vec{r}, t + \Delta) + \vec{f}(\vec{r}, t - \Delta t) - 2\vec{f}(\vec{r}, t)$$

$$= \vec{f}(\vec{r}, t) + \Delta t \frac{\partial \vec{f}}{\partial t} + \frac{\Delta t^2}{2} \frac{\partial^2 \vec{f}}{\partial t^2} + \ldots + \vec{f}(\vec{r}, t) - \Delta t \frac{\partial \vec{f}}{\partial t} + \frac{\Delta t^2}{2} \frac{\partial^2 \vec{f}}{\partial t^2} + \ldots - 2\vec{f}(\vec{r}, t)$$

$$= \Delta t^2 \frac{\partial^2 \vec{f}}{\partial t^2} + \ldots$$

Also muss $\vec{f}(\vec{r}, t)$ bezüglich der Zeit eine lineare Funktion sein. Eine analoge Überlegung für kleine Raumintervalle $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ zeigt, dass $\vec{f}(\vec{r}, t)$ auch bezüglich $\vec{r}$ linear sein muss. Schließlich gilt dies genauso für die Funktion $g(\vec{r}, t)$. Damit können wir die Transformation schreiben als

$$\begin{aligned} x' &= x'_0 + a_{xx}x + a_{xy}y + a_{xz}z + a_{xt}t \\ y' &= y'_0 + a_{yx}x + a_{yy}y + a_{yz}z + a_{yt}t \\ z' &= z'_0 + a_{zx}x + a_{zy}y + a_{zz}z + a_{zt}t \\ t' &= t'_0 + a_{tx}x + a_{ty}y + a_{tz}z + a_{tt}t \end{aligned}$$

Wegen der Homogenität von Raum und Zeit können wir die IS so wählen, dass die Koordinatenursprünge zusammenfallen

$$\vec{r}'(\vec{r} = \vec{0}, t = 0) = \vec{0} \quad t'(\vec{r} = \vec{0}, t = 0) = 0$$

Damit ist die Transformation homogen, d.h.

$$x'_0 = y'_0 = z'_0 = t'_0 = 0$$

Wegen der Isotropie des Raums können wir die Achsen so legen, dass die Relativbewegung in x-Richtung ist. Dann gilt aber für alle Zeiten für den Koordinatenursprung

$$y' = z' = 0$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ t \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x' = a_{xt}t \\ y' = a_{yt}t \\ z' = a_{zt}t \\ t' = a_{tt}t \end{pmatrix}$$

Also muss gelten

$$a_{yt} = a_{zt} = 0$$

Wir betrachten einen Punkt auf der y-Achse

$$\begin{pmatrix} 0 \\ dy \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x' = a_{xy}dy \\ y' = a_{yy}dy \\ z' = a_{zy}dy \\ t' = a_{ty}dy \end{pmatrix}$$

Da beide KS gleich orientiert sein sollen, gilt $a_{xy} = a_{zy} = 0$. Für den symmetrischen Punkt gilt dann

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -dy \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x' = 0 \\ y' = -a_{yy}dy \\ z' = 0 \\ t' = -a_{ty}dy \end{pmatrix}$$

Wegen der Isotropie des Raums muss demnach $a_{ty} = 0$ sein. Analog finden wir $a_{xz} = a_{yz} = a_{tz} = 0$. Für einen Punkt auf der x-Achse

$$\begin{pmatrix} dx \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x' = a_{xx}dx \\ y' = a_{yx}dx \\ z' = a_{zx}dx \\ t' = a_{tx}dx \end{pmatrix}$$

also $a_{yx} = a_{zx} = 0$.Somit bleibt noch

$$x' = a_{xx}x + a_{xt}t$$
$$y' = a_{yy}y$$
$$z' = a_{zz}z$$
$$t' = a_{tx}x + a_{tt}t$$

wobei wegen der Isotropie des Raums $a_{yy} = a_{zz}$sein muss.

Der Ursprung von KS' hat die Koordinaten

$$\begin{pmatrix} x = vt \\ y = 0 \\ z = 0 \\ t \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x' = a_{xx}vt + a_{xt}t = 0 \\ 0 \\ 0 \\ t' = a_{tx}vt + a_{tt}t \end{pmatrix}$$

$$a_{xx}v = -a_{xt}$$

$$x' = a_{xx}(x - vt)$$

Drehung um die y-Achse gibt

$$\begin{array}{ccc} x & \rightarrow & -x \\ y & \rightarrow & y \\ z & \rightarrow & -z \\ v & \rightarrow & -v \end{array}$$

und ebenso für die gestrichenen Koordinaten

$$x' = a_{xx}(v)(x - vt) \rightarrow -x' = a_{xx}(-v)(-x + vt)$$

$$y' = a_{yy}(v)y \rightarrow y' = a_{yy}(-v)y$$

also ist

$$a_{xx}(v) = a_{xx}(-v)$$
$$a_{yy}(v) = a_{yy}(-v)$$

Betrachten wir nun die umgekehrte Transformation von KS' zu KS

$$x = a_{xx}(-v)(x' + vt') = a_{xx}(v)(x' + vt')$$

$$y = a_{yy}(-v)y' = a_{yy}(v)y'$$

zusammen mit

$$y' = a_{yy}(v)y$$

so ist

$$y = a_{yy}^2 y$$

und wegen der gleichen Orientierung

$$a_{yy} = 1$$

insgesamt

$$\begin{gathered} x' = a_{xx}(x - vt) \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = a_{tx}x + a_{tt}t \end{gathered}$$

Jetzt verwenden wir die Konstanz der Lichtgeschwindigkeit. Wir betrachten die Ausbreitung eines Signals mit

$$x = ct \to x' = ct'$$

$$ct' = x' = a_{xx}(x - vt) = a_{xx}(ct - vt)$$

$$ct = x = a_{xx}(x' + vt') = a_{xx}(ct' + vt')$$

Daraus folgt

$$t = a_{xx}(1 + \frac{v}{c})a_{xx}(1 - \frac{v}{c})t$$

$$a_{xx}^2 = \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

$$a_{xx} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} =: \gamma(v)$$

Aus

$$x' = \gamma(x - vt)$$

$$x = \gamma(x' + vt')$$

eliminieren wir x'

$$x = \gamma(vt' + \gamma x - \gamma vt)$$

und lösen auf nach t'

$$\gamma v t' = x - \gamma^2 x + \gamma^2 v t$$

$$t' = \frac{1-\gamma^2}{\gamma v} x + \gamma t = \gamma(t - \frac{v}{c^2} x)$$

entsprechend

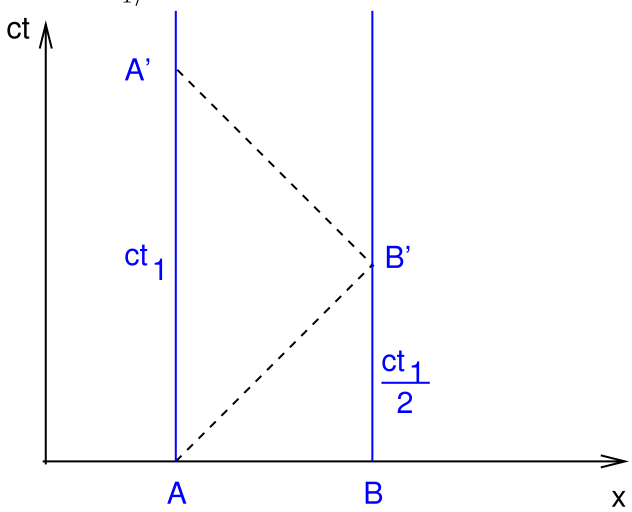
$$x' = \gamma(-vt + \gamma x' + \gamma v t')$$

$$\gamma v t = -x' + \gamma^2 x' + \gamma^2 v t'$$

$$t = -\frac{1-\gamma^2}{\gamma v} x' + \gamma t' = \gamma(t' + \frac{v}{c^2} x')$$

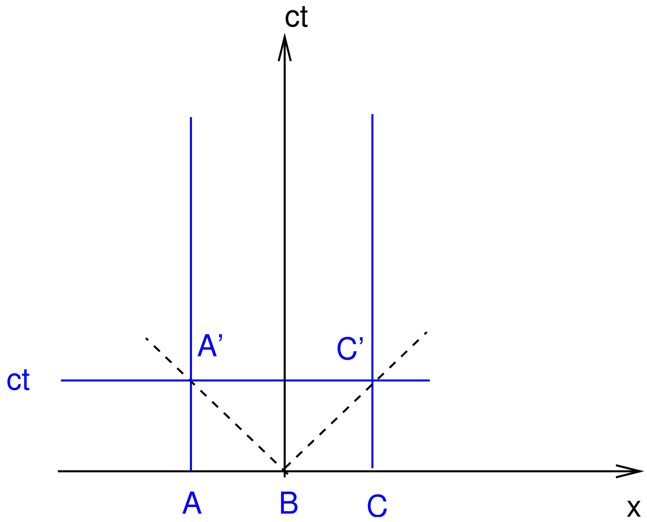
Uhrensynchronisation

Zwei Uhren befinden sich bei x=A bzw. x=B. Wegen der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit braucht ein Lichtsignal von A nach B genausolang wie von B nach A. Benötigt er für den Weg $A \to B \to A$ die Zeit t_1 , so hat er B zur Zeit $t_1/2$ erreicht.

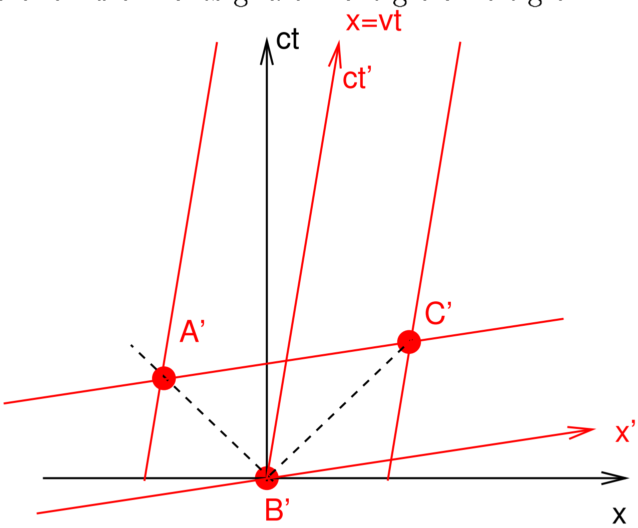


Relativität der Gleichzeitigkeit

Von B gehen gleichzeitig Lichtsignale nach links und rechts aus und treffen zur Zeit t_1 gleichzeitig in den gleich weit entfernten Punkten A und C ein.



A,B,C befinden sich nunmehr in einem IS, das sich mit Geschwindigkeit v relativ zum ersten in x-Richtung bewegt. Sein Ursprung x'=0 ist zur Zeit t an der Stelle x=vt. Da auch im neuen IS das Lichtsignal gleichzeitig in A und C beobachtet wird, muss die x' Achse parallel zu A'C' sein. Im ersten IS treffen die Lichtsignale nicht gleichzeitig ein.



Zeitdilatation

Wir messen im IS mit der Uhr bei x_1 die Zeitdifferenz zwischen zwei Ereignissen

$$E_1 = (x_1, t_1) \quad E_2 = (x_1, t_2)$$

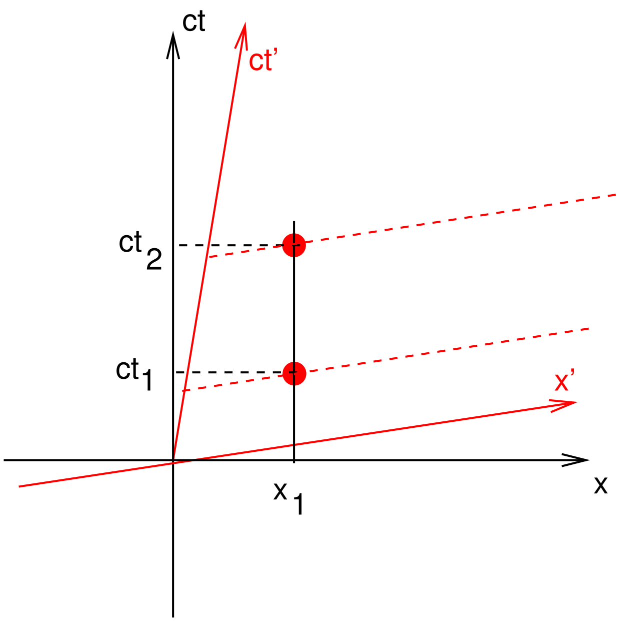
$$\Delta t = t_2 - t_1$$

Im bewegten System ist

$$t'_2 = \gamma(t_2 - \frac{v}{c^2} x_1)$$

$$t'_1 = \gamma(t_1 - \frac{v}{c^2} x_1)$$

$$\Delta t' = \gamma \Delta t$$



Lorentzkontraktion

Ein Körper ruhe im IS. Wir messen zur Zeit t seine Länge, d.h wir bestimmen die Ereignisse

$$E_1 = (x_1, t) \quad E_2 = (x_2, t)$$

$$\Delta x = x_2 - x_1$$

unabhängig von t.

Im bewegten System messen wir die Positionen der beiden Enden zur Zeit t'

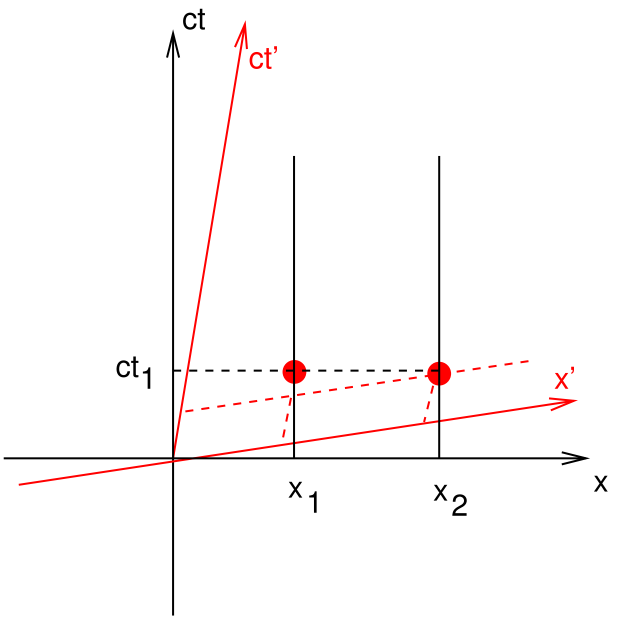
$$E_1' = (x_1', t') \quad E_2' = (x_2', t')$$

$$x_2 = \gamma(x_2' + vt') \quad x_1 = \gamma(x_1' + vt')$$

$$\Delta x = \gamma \Delta x'$$

Also ist die Länge im bewegten System kleiner

$$\Delta x' = \Delta x \sqrt{1 - v^2/c^2}$$



Lorentz-Transformation als "Drehung"

Wir schreiben die Lorentz-Transformation in der x-ct Ebene

$$x' = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\left(x - \frac{v}{c}(ct)\right) \quad (ct)' = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\left(ct - \frac{v}{c}x\right)$$

in Matrizenform

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} & -\frac{\frac{v}{c}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \\ -\frac{\frac{v}{c}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} & \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix}$$

Wir sehen, dass

$$a_{11} = a_{22} \quad a_{12} = a_{21}$$

gilt. Ausserdem ist

$$a_{11}^2 - a_{12}^2 = \frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}} - \frac{\frac{v^2}{c^2}}{1-\frac{v^2}{c^2}} = 1$$

Nun wählen wir ω (sogenannte Rapidität) folgendermassen:

$$\tanh(\omega) = -\frac{a_{12}}{a_{11}} = \frac{\frac{\frac{v}{c}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}}{\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}} = \frac{v}{c}$$

Für die hyperbolischen Funktionen gilt

$$\tanh^2 = \frac{\sinh^2}{\cosh^2} = \frac{\cosh^2 - 1}{\cosh^2} = 1 - \frac{1}{\cosh^2}$$

$$\cosh^2 = \frac{1}{1-\tanh^2} = \frac{1}{1-v^2/c^2}$$

$$\sinh = \cosh\,\tanh = \frac{v/c}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

Dann hat die Matrix die Form ähnlich wie bei einer Drehung

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\omega & -\sinh\omega \\ -\sinh\omega & \cosh\omega \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix}$$

Für $v \leq c$ läßt sich immer ein reelles ω finden.

Addition von Geschwindigkeiten

Führen wir zwei Lorentz-Transformationen nacheinander aus

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\omega_1 & -\sinh\omega_1 \\ -\sinh\omega_1 & \cosh\omega_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cosh\omega_2 & -\sinh\omega_2 \\ -\sinh\omega_2 & \cosh\omega_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix}$$

ist die Matrix der resultierenden Transformation

$$\begin{pmatrix} \cosh\omega_1\cosh\omega_2 + \sinh\omega_1\sinh\omega_2 & -\cosh\omega_1\sinh\omega_2 - \sinh\omega_1\cosh\omega_2 \\ -\sinh\omega_1\cosh\omega_2 - \cosh\omega_1\sinh\omega_2 & \sinh\omega_1\sinh\omega_2 + \cosh\omega_1\cosh\omega_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cosh(\omega_1+\omega_2) & -\sinh(\omega_1+\omega_2) \\ -\sinh(\omega_1+\omega_2) & \cosh(\omega_1+\omega_2) \end{pmatrix}$$

Die Rapidität ist also additiv! Für die Geschwindigkeit gilt

$$\tanh(\omega_1+\omega_2) = \frac{\sinh(\omega_1)\cosh(\omega_2) + \cosh(\omega_1)\sinh(\omega_2)}{\cosh(\omega_1)\cosh(\omega_2) + \sinh(\omega_1)\sinh(\omega_2)}$$

$$= \frac{\tanh(\omega_1) + \tanh(\omega_2)}{1 + \tanh(\omega_1)\tanh(\omega_2)} = \frac{\frac{v_1}{c} + \frac{v_2}{c}}{1 + \frac{v_1}{c}\frac{v_2}{c}}$$

Raum-Zeit-Invariante

$$(ct')^2 - x' = (\cosh\, ct - \sinh\, x)^2 - (-\sinh\, ct + \cosh\, x)^2$$

$$= (ct)^2(\cosh^2 - \sinh^2) + x^2(\sinh^2 - \cosh^2) = (ct)^2 - x^2$$

Wir transformieren zwei Ereignisse mit $\Delta x = x_2 - x_1$, $\Delta t = t_2 - t_1$

$$\Delta x' = \gamma(\Delta x - v\Delta t)$$

$$\Delta t' = \gamma(\Delta t - \frac{v}{c^2}\Delta x)$$

das neue System kann so gewählt werden, dass beide Ereignisse am gleichen Ort sind (raumartig) falls

$$c^2\Delta t^2 - \Delta x^2 > 0$$

und es kann so gewählt werden, dass beide Ereignisse dort gleichzeitig sind (zeitartig) falls

$$c^2\Delta t^2 - \Delta x^2 < 0$$